TD 8.11 – Quelques jeux mathématiques avec Excel.

On pourra travailler ces exercices à partir d'un classeur Excel vierge.

Ex 1. Le nombre d'or

Vers 1509 le moine franciscain Luca Pacioli (Fibonacci) s'est intéressé aux moeurs des lapins :

• un premier couple de lapins (première génération) donne naissance à un unique couple de lapins à la deuxième génération, puis de nouveau à un unique couple à la troisième génération;

• de même, le couple né à la deuxième génération donne naissance à un couple à la troisième génération et à un couple à la quatrième génération;

• le processus se poursuit indéfiniment.

On veut générer la suite U représentant cet accroissement de population, dans le cas $U_0=1$ et $U_1=1$ et $U_{N+2}=U_N+U_{N+1}$

1- Proposer une implémentation qui affiche U_0 en A1, U_1 en A2, U_2 en A3 etc. On pourra aller jusqu'au rang 1000.

2- Tester expérimentaement que le rapport entre U_N et U_{N-1} tend vers le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ex 2. Calcul de pi par la formule de Viète

Il s'agit de calculer π par la formule de Viète.

$$V_0=0 \qquad V_{n+1}=\sqrt{\frac{1+V_n}{2}}$$

$$U_0=2 \qquad U_{n+1}=\frac{U_n}{V_{n+1}}$$

avec U_n tend vers π lorsque n tend vers l'infini. Afficher un graphique qui montre l'évolution de la distance à π en fonction de n. Pour illustrer cette convergence, on tracera également la courbe $y=\pi$.

Ex 3. Triangle de Pascal

L'exercice consiste à afficher les premières lignes du triangle de Pascal.

Pour cela on utilise la formule récurrente traditionnelle : $C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p$.

Ex 4. La Suite de Syracuse

On considère la suite suivante :

$$N_0\, entier\ positif \qquad N_i\, pair\, implique\ N_{i+1}=\frac{N_i}{2} \qquad N_i\, impair\, implique\ N_{i+1}=3*N_i+1$$

Il s'agit d'une itération sur un nombre de départ. Si le nombre est impair on le gonfle, s'il est pair on l'amortit. On observe qu’au bout d’un certain nombre d’itérations la suite boucle sur < 4 2 1 >. Au cours des itérations, le nombre va osciller en croissant et décroissant, atteignant par instants une hauteur surprenante, mais il n'a pas encore été découvert de nombre qui ne revient pas sur 1.

Extrait de Wikipedia :

"La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque ou problème 3x+1 est l'hypothèse mathématique selon laquelle les suites de Syracuse de tous les nombres strictement positifs atteignent 1.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture continue de défier les mathématiciens. Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse: <<les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes>>."

1- Tracer le graphe des valeurs successives obtenues pour différentes valeurs de départ. Essayer en particulier le nombre 27.

2- Pour une série de nombres entiers de départ, tracer la courbe du nombre max atteint.

3- Pour une série de nombres entiers de départ, tracer la courbe du rang de la première occurence de 1.

Ex 4. Anniversaire

Le hasard des concours a réuni 36 élèves. Ont-ils tous des dates d’anniversaire différentes? Nous allons expérimenter cette question :

1) mettre en colonne 36 nombres tirés au hasard, compris entre 1 et 365, représentant les jours d’anniversaire. La fomule pour tirer un nombre au hasard entre 1 et 365 est : =ALEA.ENTRE.BORNES(1;365), elle sera explicitée dans le cours 3.

2) Reflechir à une méthode pour savoir si on a au moins deux fois la même date au sein de l'ensemble des dates. Si une telle méthode est trouvée : l'implémenter puis passer au point 6), sinon reprendre au point 3)

3) Recupérer la série des 36 valeurs de date d'anniversaire : en faire un collage en valeur dans une plage adjacente. Classer les valeurs au sein de la plage, en utilisant la commande "Trier" dans le menu "Données".

4) calculer dans une autre colonne les différences de deux nombres successifs de la série classée. On nomme cette série de données "PlageDifferences"

5) faire le produit des différences : =PRODUIT("PlageDifferences"). A partir du résultat du produit, choisir une case et mettre une formule qui affiche "Oui" si il existe au moins deux dates d'anniversaire qui sont les même, "non" sinon.

6) Calculer la probabilité d'avoir au moins une date d'anniversaire répétée sur 10 séries de 36 dates.

7) Pourrait on compter le nombre des élèves qui partagent leur date d'anniversaire avec un autre ?

Ex 5. Météo

Soit un pays dans lequel il peut faire beau ou mauvais

Quand il fait beau, la probabilité qu’il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{2}{3}$

Quand il fait mauvais, la probabilité pour qu’il fasse mauvais le lendemain est de $\frac{1}{2}$

Aujourd’hui il fait beau. Déterminer la probabilité pour qu’il fasse beau dans n jours.

Et à long terme, peut on faire une prédiction ?

Indications : Soit P_n la probabilité qu’il fasse beau dans n jours et Q_n la probabilité qu’il y fasse mauvais.

On a : $P_n+Q_n=1$ $P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}*Q_{n-1}$ $Q_n=\frac{1}{3}*P_{n-1}+\frac{1}{2}*Q_{n-1}$

Ex 6. Un graphique scientifique : sinusoïde bruitée

1— Dans une nouvelle feuille de calcul, tabuler la fonction sin(x) : la colonne A pour x, la colonne B pour sin(x). Insérer une nouvelle feuille dans le classeur : une feuille graphique sur laquelle on affiche le nuage des points (x,sin(x)).

2— Ajouter un bruit de fond à la sinusoïde : en colonne C calculer une fonction aléatoire =K*ALEA(); en F1 entrez la valeur de K, nommer la cellule K. En colonne D sommer sinusoïde et bruit. Tracer le graphique de la sinusoïde bruitée sur la feuille graphique, en plus de la première fonction.

3— Organiser votre écran pour avoir deux fenêtres actives correspondant au classeur et qui soient visibles simultanément. Modifier la valeur du coefficient K, en F1: observez la modification simultanée du graphique.

Ex 7. Racine carrré

Calculer la racine carrée d'un réel positif donné. Pour cela on utilise la suite de Newton :

$$U_0=1 \qquad U_{n+1}=\frac{U_n+\frac{a}{U_n}}{2}$$

en sachant que cette suite converge vers $\sqrt{a}$.

Tester les résultats pour différentes valeurs de a et de U_0

Ex 8. Le nombre de Kaprekar

Soit un nombre de 4 chiffres quelconque, par exemple 1946. Rangeons ses chiffres dans l'ordre décroissant: 9641; puis croissant: 1469. La différence entre ces deux nombres est 8172. En répétant la même opération comme de besoin sur le dernier nombre obtenu, on parvient toujours au nombre 6174 ou nombre de Kaprekar.

On veut vérifier cela à partir de quelques nombres de 4 chiffres. Pour ce faire, on introduit le nombre à tester en A1, on met le chiffre des milliers en case A2, le chiffre des centaines en case A3, le chiffre des centaines en A4 et le chiffre des unités en case A5. Dans la plage A6:A9, on fait une copie en valeur des cases A2:A5. En A10, on met le nombre obtenu avec les chiffres du nombre de A1 lorsqu'ils sont classés dans l'ordre croissant. En A11, on met le nombre obtenu avec les chiffres du nombre de A1 lorsqu'ils sont classés dans l'ordre décroissant. Il reste à faire la différence entre A11 et A10. Enregistrer la série des opérations décrites dans une macro et créer un bouton pour l'exécution de cette macro. Il suffit ensuite de changer le chiffre en A1 et exécuter la macro.

Implémenter.

Ex 9. Un moulin à nombres

Le moulin à nombres est une feuille de calcul qui va "mouliner" un nombre de la manière suivante :
=> d'abord multiplier par 2

=> puis retrancher 7

=> et diviser le résultat par le nombre initial augmenté de 1
enfin recommencer avec le quotient obtenu.

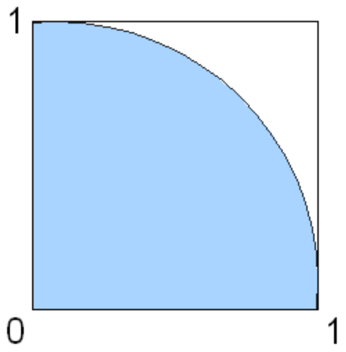
Préparez la feuille de calcul pour mouliner 2001 fois. Entrez le nombre 2001. Quel résultat s'affiche ?
Et en partant d'un autre nombre ?

D'après Le Monde, "affaire de logique, problème n°200", du 5 décembre 2000

Ex 10. Approximer Pi par une méthode Monte-Carlo.

Principe de la méthode

On considère un carré de côté 1. On trace un cercle de diametre 1 et de centre le coin inférieur gauche du carré, un quart du cercle apparaît inscrit dans le carré :



On peut tirer au hasard des points dans le carré. Pour chaque point, il suffit de tirer une abscisse dans [0:1] et une ordonnée dans [0:1], on peut ainsi tirer une série de M points. Pour chacun des points, on teste si il est dans le cercle ou dans la partie du carré qui est hors du cercle (la partie bleutée sur la figure précédente). On compte le nombre des points dans le cercle et on note N ce nombre. Dans ce cas, N/M tend vers pi/4 avec M tend vers l'infini.

Implémentation

1) Tirage au sort de couples de valeurs dans [0:1]*[0:1] : pour chaque couple, on affiche l'abscisse dans la colonne A, l'ordonnée dans la colonne B de la même ligne.
2) Dans la colonne C, on affiche 0 si le point dont l'abscisse et l'ordonnée sont consignées dans la même ligne, sont hors du cercle, 1 sinon. Pour savoir si un point (x,y) est dans le cercle, il suffit de vérifier que $x^2+y^2<1$.
3) On peut ensuite calculer l'approximation de pi sur l'ensemble des tirages
4) Sur le graphique, faire apparaître l'évolution de l'approximation en foncton du nombre des tests et la courbe y=pi